Soluciones para algunas ecuaciones diferenciales de primer orden

Variables separadas

$$F(x)\,G(y)\,dx + H(x)\,P(y)\,dy = 0$$

Solución

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}\,dx + \int \frac{P(y)}{G(y)}\,dy = K$$

Homogénea

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Condición

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n\, M(x,y) \;\wedge\; N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n\, N(x,y)$$

Procesos

Cambiar $y = u\,x$, $\quad f(u) = -\dfrac{M(x,u)}{N(x,u)}$

Solución

$x = K\, e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}$ deshacer luego el cambio con $u = y/x$

Exacta

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Solución

$$\int M\,dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\,dx \right) dy = K$$

o también ...

$$\int N\,dy + \int \left(M - \frac{\partial}{\partial x} \int N\,dy \right) dx = K$$

Reducible a exacta

(caso particular con factor integrante función de una sola variable)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Condición

Si $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ sólo depende de x entonces $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$

Si $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ sólo depende de y entonces $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$

Solución

Multiplicar la ED por el factor integrante μ y resolver como exacta

Lineal no homogénea

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Solución

$$y\, e^{\int p\,dx} = \int q\, e^{\int p\,dx}\,dx + K$$

Lineal homogénea

$$y' + p(x)\,y = 0$$

Solución

$$y\, e^{\int p\,dx} = K$$

Bernoulli

$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n \quad$ siendo $n \neq 0 \;\wedge\; n \neq 1$

Solución

$$y^{1-n}\, e^{\int (1-n)\,p\,dx} = \int (1-n)\,q\, e^{\int (1-n)\,p\,dx}\,dx + K$$

$n = 0$: véase Lineal no homogénea
$n = 1$: veáse Lineal homogénea