Desarrollo en serie de Taylor para una función de una variable.

El desarrollo en serie de la función $f(x)$ en el punto a es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

Siendo R_n el resto de Lagrange: $R_n = \dfrac{f^{n+1}(\theta)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, donde θ es un valor entre a y x.

$n!$ se lee *n factorial* y corresponde a la multiplicación de todos los valores enteros desde n a 1:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot .... \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ejemplo: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Cuando el punto del desarrollo es $a = 0$, al desarrollo se la llama también desarrollo de Maclaurin.

Desarrollos en serie de algunas funciones.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots \qquad 0 < x \le 2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots \qquad -1 < x \le 1$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \right) \qquad -1 < x < 1$$

$$\arctan x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots & x \le -1 \\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots & -1 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots & x \ge 1 \end{cases}$$