Problemas de Geometría Analítica del Espacio

1) Dados los vectores $\vec{u}(4,\ -4,\ 8)$, $\vec{v}(-2,\ 6,\ -5)$, $\vec{w}(3,\ 5,\ -8)$ y $\vec{a}(22,\ 6,\ -11)$.
Hallar los valores de $x,\ y,\ z$ que verifican la combinación lineal $\vec{a} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w}$.

2) Dados los vectores $\vec{a}(-5,\ 19,\ n)$ y $\vec{b}(h,\ 3,\ 6)$, determinar el valor de los parámetros n y h para que los vectores sean perpendiculares y que el módulo de $\vec{b}$ valga 9, siendo $h > 0$.

3) Hallar un vector unitario y ortogonal a los vectores $\vec{a}(9,\ 2,\ -10)$ y $\vec{b}(2,\ 11,\ 10)$.

4) Dados los vectores $\vec{u}(-12,\ p,\ -8)$ y $\vec{v}(-48,\ -4,\ -32)$, hallar el valor o valores del parámetro p en cada uno de los siguientes casos:
a) El módulo de $\vec{u}$ vale 28. **b)** Los vectores son paralelos. **c)** Los vectores son ortogonales (perpendiculares).

5) Hallar el valor del parámetro p para que los vectores $\vec{a}(10,\ 12,\ 4)$, $\vec{b}(12,\ 11,\ -15)$ y $\vec{c}(p,\ 14,\ 6)$ sean linealmente independientes.

6) Determinar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(6,\ 1,\ -2)$ y $B(15,\ 6,\ 4)$ y es paralelo al vector $\vec{u}(4,\ 5,\ 6)$.

7) Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(2,\ -2,\ 6)$, $B(3,\ 0,\ 2)$ y $C(3,\ 3,\ 1)$.

8) Determinar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(9,\ -1,\ -2)$ y $B(10,\ 0,\ 3)$ y es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

9) Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto $A(7,\ -8,\ -7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(1,\ 4,\ -3)$.

10) Determinar la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(5,\ 6,\ 12)$ y es perpendicular a la recta $r: (x, y, z) = (7; 6; 17) + t\,(1; -3; 1)$.

11) Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(9,\ 4,\ -1)$ y es paralelo a las rectas $r: (x, y, z) = (0; 4; 2) + t\,(2; 0; 3)$ y $s: \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{-9} = \dfrac{z-6}{-6}$.

12) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(12,\ -6,\ 7)$ y $B(13,\ -6,\ 9)$ y es perpendicular al plano $\pi: 5x + y + 9z - 20 = 0$.

Problemas de Geometría Analítica del Espacio

13) Determinar la ecuación general del plano que contiene a las rectas $r: (x, y, z) = (5; 11; -6) + t\,(4; 1; 10)$ y $s: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-11}{0} = \dfrac{z+6}{1}$.

14) Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(-4, 2, 0)$ y $B(-3, 1, -1)$.

15) Determinar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(3, 12, -7)$ y es paralela a la recta

$r: \begin{cases} -y - 2z + 8 = 0 \\ -x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

16) Determinar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(12, -9, -2)$ y es paralela a la recta

$r: \begin{cases} x + y - 11z - 16 = 0 \\ 5x - 7y - 7z - 8 = 0 \end{cases}$.

17) Determinar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(12, -4, 10)$ y es perpendicular al plano $\pi: -x - 2y + 6 = 0$.

18) Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(-3, -7, 7)$ y corta a las rectas

$r_1: \dfrac{x-10}{4} = \dfrac{y-3}{10} = \dfrac{z+1}{-9}$ y $r_2: \dfrac{x-26}{2} = \dfrac{y+14}{-7} = \dfrac{z-18}{8}$.

19) Determinar la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a la recta

$r: \dfrac{x+19}{8} = \dfrac{y-15}{-2} = \dfrac{z+15}{6}$ en el punto $A(5, 9, 3)$ y es paralela al plano $\pi: -x - y + z + 10 = 0$.

20) Calcular el valor del parámetro q para que el punto $A\,(-1,\ -3,\ 11)$ diste 3 unidades del plano $6x + qy + 2z + 14 = 0$.

21) Calcular el valor del parámetro p para que los puntos $A\,(-7,\ -8,\ 4)$, $B\,(-7,\ 7,\ 5)$, $C\,(-3,\ 10,\ -6)$ y $D\,(1,\ p,\ -18)$ sean coplanarios.

22) Estudiar la posición relativa del plano y la recta siguientes calculando el punto de corte cuando sea posible:

$$\pi:\ x - 6y + 3z - 17 = 0, \qquad r: \begin{cases} 3x + 7y + 3z - 2 = 0 \\ 4x + y + 6z - 16 = 0 \end{cases}$$

Problemas de Geometría Analítica del Espacio

23) Estudiar la posición relativa del plano y la recta siguientes calculando el punto de corte cuando sea posible:

$$\pi:\ x - 2y + 3z + 7 = 0, \qquad r:\ \begin{cases} x - 3y + 6z + 14 = 0 \\ y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

24) Estudiar la posición relativa del plano y la recta siguientes calculando el punto de corte cuando sea posible:

$$\pi:\ x + 3y - z - 4 = 0, \qquad r:\ \begin{cases} 3x - 2y - 2z - 5 = 0 \\ 6x - 2y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

25) Estudiar la posición relativa del plano y la recta siguientes en función del parámetro k y hallar el punto de corte cuando sea posible.

$$\pi:\ x - 2y + 5z = -7, \qquad r:\ \begin{cases} 2x + y + (k+5)\,z = 1 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$$

26) Estudiar la posición relativa del plano y la recta siguientes en función del parámetro m y calcular el punto de corte (si es posible) para el caso $m = 5$.

$$\pi:\ x + 4y - 2z = -18, \qquad r:\ \begin{cases} y - 2z = -9 \\ -3x + my - 6z = -11 \end{cases}$$

27) Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas indicando el punto de corte cuando sea posible.

$$r_1:\ \frac{x+1}{1} = \frac{y-12}{5} = \frac{z-7}{3}, \qquad r_2:\ \frac{x+2}{0} = \frac{y-13}{6} = \frac{z-11}{7}$$

28) Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas indicando el punto de corte cuando sea posible.

$$r_1:\ \frac{x+7}{3} = \frac{y-6}{9} = \frac{z}{6}, \qquad r_2:\ \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 10 - 4\lambda \\ z = 8 - 5\lambda \end{cases}$$

29) Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas indicando el punto de corte cuando sea posible.

$$r_1:\ (x, y, z) = (-5; 8; -4) + \mu\,(5; -1; 5), \qquad r_2:\ \begin{cases} 10y + 2z - 72 = 0 \\ 10x - 10z + 10 = 0 \end{cases}$$

Problemas de Geometría Analítica del Espacio

30) Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas indicando el punto de corte cuando sea posible.

$$r_1: \begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = 7 + \mu \\ z = -4 - 6\mu \end{cases}, \qquad r_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{-18}$$

31) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función del parámetro r.

$$r_1: \frac{x-9}{8} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-9}{4}, \qquad r_2: \frac{x-25}{16} = \frac{y+1}{r} = \frac{z-17}{8}$$

32) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función del parámetro p y calcular el punto de corte cuando sea posible.

$$r_1: \begin{cases} 5y - 7z + 33 = 0 \\ 5x - 10z + 135 = 0 \end{cases}, \qquad r_2: \frac{x+1}{8} = \frac{y}{-6} = \frac{z-p}{1}$$

33) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función del parámetro p.

$$r_1: \begin{cases} 2x - 6z - 22 = 0 \\ 2y - 24 = 0 \end{cases}, \qquad r_2: \frac{x-12}{12} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-11}{p}$$

Problemas de Geometría Analítica del Espacio

Soluciones:

1) $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 4.$

2) $n = \frac{-9}{2}; \qquad h = 6$

3) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-22}{39}, \frac{19}{39}\right)$

4) **a)** $p = \pm 24$ **b)** $p = -1$ **c)** $p = 208.$

5) $p \neq \frac{321}{28}.$

6) $6y - 5z - 16 = 0$

7) $10x + y + 3z - 36 = 0$

8) $4x - 9y + z - 43 = 0$

9) $x + 4y - 3z + 4 = 0$

10) $x - 3y + z + 1 = 0$

11) $3x + 3y - 2z - 41 = 0$

12) $2x - y - z - 23 = 0$

13) $x + 6y - z - 77 = 0$

14) $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$

15) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-12}{2} = \frac{z+7}{-1}$

16) $\frac{x-12}{7} = \frac{y+9}{4} = \frac{z+2}{1}$

17) $\frac{x-12}{-1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-10}{0}$

18) $\frac{x+3}{9} = \frac{y+7}{0} = \frac{z-7}{1}$

19) $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-9}{7} = \frac{z-3}{5}$

20) $q = 3$

21) $p = -2$

22) Recta paralela al plano

23) Recta contenida en el plano

24) Secantes en un punto $P\ (-3,\ 0,\ -7)$

25) $k = -10 \rightarrow$ Recta contenida en el plano.
$k \neq -10 \rightarrow$ Secantes en un punto $P\ (-1,\ 3,\ 0)$.

26) $m = -6 \rightarrow$ Recta paralela al plano. $m \neq -6 \rightarrow$ Secantes en un punto.
$m = 5 \rightarrow$ Secantes en un punto $P\ (-6,\ -1,\ 4)$

27) Secantes en un punto, $P\ (-2;\ 7;\ 4)$

28) Se cruzan en el espacio

Problemas de Geometría Analítica del Espacio

30) Rectas paralelas

31) $r \neq 4 \rightarrow$ Secantes (se cortan).

$r = 4 \rightarrow$ Rectas coincidentes.

32) $p \neq 10 \rightarrow$ Se cruzan en el espacio.

$p = 10 \rightarrow$ Secantes en un punto, $P\ (-9;\ 6;\ 9)$.

33) $p \neq 4 \rightarrow$ Se cruzan en el espacio.

$p = 4 \rightarrow$ Rectas paralelas.